Exercice 3 **4 points**

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} v_0 & = & \ln(4) \\ v_{n+1} & = & \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right) \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad w_n = (-1+\mathrm{e}^{v_n}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et strictement positive.

1. • $v_1 = \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_0}\right) = \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{\ln 4}\right) = \ln(-1+2\times 4) = \ln(-1+8) = \ln 7$ (valeur approchée ligne 4 colonne 3)
   • $w_0 = -1+\mathrm{e}^{v_0} = -1+\mathrm{e}^{\ln 4} = -+4 = 3$ (valeur ligne 3 colonne 4)
2. **a.** Il faut saisir la formule 2.
   b. On peut penser que la suite (v_n) est croissante
   c. Démonstration par récurrence :
   Initialisation: on a $v_0 = \ln 4$ et $v_1 = \ln 7$: la croissance de la fonction ln assure que $v_0 < v_1$.
   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n < v_{n+1}$, alors :
   $\mathrm{e}^{v_n} < \mathrm{e}^{v_{n+1}}$ par croissance de la fonction exponentielle
   $2\mathrm{e}^{v_n} < 2\mathrm{e}^{v_{n+1}}$ la multiplication par $+2$ respecte l'ordre
   $-1+2\mathrm{e}^{v_n} < -1+2\mathrm{e}^{v_{n+1}}$ l'addition respecte l'ordre
   $\ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right) < \ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_{n+1}}\right)$ par croissance de la fonction logarithme népérien (on a supposé que la suite (v_n) est bien définie donc que tous les nombres de la forme $-1+2\mathrm{e}^{v_n}$ sont supérieurs à zéro) ; soit finalement
   $v_{n+1} < v_{n+2}$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang suivant : d'après le principe de récurrence :

   $$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N}, \quad v_n < v_{n+1}$$

   La suite (v_n) est croissante.
3. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_n = -1+\mathrm{e}^{v_n}$, donc
   $w_{n+1} = -1+\mathrm{e}^{v_{n+1}} = -1+\mathrm{e}^{\ln\left(-1+2\mathrm{e}^{v_n}\right)} = -1-1+2\mathrm{e}^{v_n} = -2+2\mathrm{e}^{v_n} = 2\left(-1+\mathrm{e}^{v_n}\right)$: finalement
   Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_{n+1} = 2w_n$: cette égalité montre que la suite w_n est géométrique de raison 2 avec pour premier terme $w_0 = 3$.
   b. On sait qu'alors le terme général w_n est égal à :

   $$w_n = 3\times 2^n$$

   Or par définition $w_n = -1+\mathrm{e}^{v_n} = 3\times 2^n \iff \mathrm{e}^{v_n} = 1+3\times 2^n$.
   Par croissance de la fonction logarithme népérien : $v_n = \ln\left(1+3\times 2^n\right)$ pour tout entier naturel.

c. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times 2^n = +\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + 3 \times 2^n = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 + 3 \times 2^n\right) = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

4. L'algorithme permet de calculer les termes de la suite v_n à partir de v_0. On vient de démontrer que la suite (v_n) n'est pas majorée. Donc quel que soit le choix du nombre S, il existe un rang p, tel que $v_p > S$ et l'algorithme donnera ce rang p.